

Rapport de projet

Étude mécanique d'un assemblage tenon-mortaise par modélisation théorique et simulation numérique

Auteurs :
Yu Jiachen
Cao Guangyu

Encadrant : Paolo Vannucci
Année universitaire 2025–2026

Table des matières

1 Introduction	3
1.1 Contexte	3
1.2 Objectif du projet	3
1.3 Démarche adoptée	4
2 Modélisation théorique	5
2.1 Géométrie et hypothèses	5
2.2 Cinématique du déplacement	6
2.3 Modèle de contact	6
2.4 Résultante des efforts	7
2.5 Étude des zones de contact	8
3 Modélisation numérique et difficultés de contact	11
3.1 Géométrie du modèle	11
3.2 Matériaux et hypothèses mécaniques	12
3.3 Conditions aux limites et définition du contact	13
3.4 Difficultés numériques rencontrées	14
3.4.1 Problèmes de pénétration	15
3.4.2 Sensibilité du solveur de contact	16
3.4.3 Limites liées au logiciel	17
3.5 Choix du cas d'étude retenu	17
4 Résultats numériques et analyse mécanique	18
4.1 Validation qualitative du contact total	18
4.2 Analyse des déplacements	19
4.3 Analyse des contraintes	22
4.4 Analyse de la pression de contact	24
4.5 Vérification de l'effet du moment équivalent	26
5 Conclusion	28

1 Introduction

1.1 Contexte

L'assemblage tenon-mortaise est une structure de liaison et de support couramment utilisée dans les constructions en bois traditionnelles. Grâce à sa géométrie relativement simple et à son système d'assemblage sans clous, cette technique permet de réduire l'utilisation de matériaux tout en assurant une bonne stabilité mécanique. Pour cette raison, elle présente un intérêt particulier aussi bien dans l'architecture traditionnelle que dans l'étude des structures modernes.

Afin de mieux comprendre les propriétés mécaniques de ce type d'assemblage, nous proposons d'étudier les mécanismes de transmission des efforts ainsi que les problèmes de contact entre les différentes pièces. Cette étude sera réalisée à l'aide d'une approche théorique complétée par des simulations numériques afin d'analyser le comportement mécanique de la structure sous chargement.

1.2 Objectif du projet

L'objectif de ce projet est de construire un modèle mécanique simplifié d'un assemblage tenon-mortaise afin d'étudier le comportement du tenon sous chargement. Nous nous intéressons principalement aux déplacements, aux rotations, aux déformations ainsi qu'à la distribution des contraintes dans la zone de contact après application d'un effort.

Dans la partie théorique, nous proposerons une simplification du système réel afin d'établir un modèle de pression de contact décrivant la transmission des efforts entre le tenon et la mortaise. Ensuite, des simulations numériques seront réalisées sous ANSYS pour analyser les déplacements et les contraintes obtenus dans différentes conditions de chargement.

Enfin, les résultats théoriques seront comparés aux résultats numériques afin de vérifier la cohérence du modèle simplifié et de discuter des limites ainsi que des écarts observés.

1.3 Démarche adoptée

Dans ce projet, nous avons commencé par établir un modèle théorique. En raison des limites liées aux conditions d'étude ainsi qu'au temps disponible, il n'était pas possible d'étudier un modèle trop complexe représentant exactement le comportement réel de l'assemblage tenon-mortaise. Nous avons donc adopté plusieurs hypothèses simplificatrices afin d'obtenir un modèle plus accessible à analyser.

Dans la partie théorique, nous avons choisi le modèle de Winkler comme base de notre étude pour représenter le contact entre le tenon et la mortaise. À partir de ce modèle, nous avons réalisé une analyse théorique des déplacements, des rotations ainsi que de la distribution des pressions de contact lorsque le tenon est soumis à un chargement.

Après cette étude théorique, nous avons effectué des simulations numériques sous ANSYS à partir du modèle simplifié afin d'obtenir les champs de déplacement et de contraintes correspondants.

Enfin, nous avons comparé les résultats théoriques et numériques afin de vérifier la cohérence du modèle utilisé et de discuter des différences observées entre les deux approches.

2 Modélisation théorique

2.1 Géométrie et hypothèses

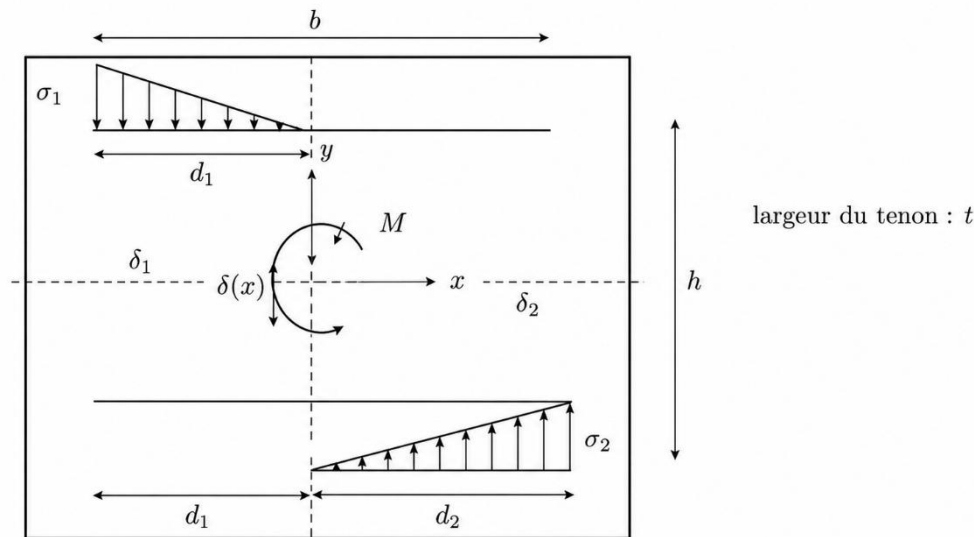


Figure 1: Modèle de contact non uniforme dans un assemblage tenon mortaise

Afin de faciliter l'analyse théorique de l'assemblage tenon-mortaise, nous avons construit un modèle de contact bidimensionnel simplifié, représenté sur la figure 1. Dans ce modèle, le contact entre le tenon et la mortaise est simplifié en deux zones de contact locales, et la pression de contact est supposée varier linéairement le long des surfaces de contact.

Dans cette représentation, b désigne la longueur du tenon, h sa hauteur et t son épaisseur. Le repère est placé au centre du tenon, avec l'axe x orienté horizontalement.

Sous l'effet du chargement extérieur, le tenon subit à la fois une translation et une rotation, ce qui entraîne une distribution non uniforme des pressions de contact. Les grandeurs σ_1 et σ_2 représentent les contraintes de contact dans les zones supérieure et inférieure, tandis que d_1 et d_2 correspondent aux longueurs de contact associées.

Par ailleurs, $\delta(x)$ représente l'enfoncement local au point de contact, et δ_1 ainsi que δ_2 désignent les déplacements d'enfoncement aux extrémités. Le modèle prend également en compte l'effort extérieur T ainsi que le moment M associé.

2.2 Cinématique du déplacement

Cette hypothèse signifie que la pression de contact en un point donné est proportionnelle au déplacement local d'enfoncement.

On considère un tenon de largeur b et d'épaisseur t . L'axe x est pris suivant la largeur du tenon, avec l'origine au centre de la zone de contact :

$$x \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right]$$

Le mouvement du tenon est décrit par une translation verticale v et une rotation φ . En supposant que le tenon reste rigide, le déplacement local d'enfoncement s'écrit :

$$\delta(x) = -v - x \tan \varphi$$

Pour de petites rotations, on utilise l'approximation :

$$\tan \varphi \simeq \varphi$$

2.3 Modèle de contact

Dans cette partie, on cherche à établir un modèle théorique simplifié permettant de relier les efforts appliqués à l'assemblage tenon-mortaise aux déplacements du tenon. Le tenon est supposé rigide, tandis que la mortaise est modélisée comme un milieu élastique local de type Winkler.

Dans le modèle de Winkler, la pression de contact est donnée par :

$$\sigma(x) = -k\delta(x)$$

où k est la raideur locale de contact. La force linéique devient alors :

$$f(x) = t\sigma(x) = -kt\delta(x)$$

Ainsi :

$$f(x) = -kt(-v - x \tan \varphi) = kt(v + x \tan \varphi)$$

Ici, k représente la raideur locale de contact, c'est-à-dire la capacité du matériau de la mortaise à résister à l'enfoncement local. Dans le modèle de Winkler, on suppose que chaque point de contact agit indépendamment des autres : la pression de contact en un point dépend uniquement du déplacement local en ce point.

La valeur de k dépend généralement des propriétés mécaniques du matériau ainsi que de la géométrie de la zone de contact. Une valeur élevée de k correspond à une structure plus rigide et donc moins sensible à l'enfoncement local.

2.4 Résultante des efforts

Afin d'établir la relation entre les charges appliquées et le mouvement du tenon, nous intégrons les efforts répartis sur la zone de contact et utilisons les conditions d'équilibre statique global du système. L'intégration de la pression de contact permet ainsi d'obtenir la résultante verticale ainsi que le moment associé par rapport au centre du tenon. Les équations d'équilibre permettent ensuite d'exprimer les charges extérieures T et le moment M en fonction du déplacement vertical v et de la rotation φ du tenon.

L'équilibre global impose, Force verticale :

$$T = \int_{-b/2}^{b/2} f(x) dx$$

En substituant $f(x)$:

$$T = \int_{-b/2}^{b/2} k t(v+x \tan \varphi) dx = -kt \left[\int_{-b/2}^{b/2} v dx + \tan \varphi \int_{-b/2}^{b/2} x dx \right]$$

Or :

$$\int_{-b/2}^{b/2} x dx = 0$$

Donc :

$$T = ktvb$$

On obtient :

$$v = \frac{T}{ktb}$$

Pour l'équilibre des moments, on a :

$$M = \int_{-b/2}^{b/2} x f(x) dx = \int_{-b/2}^{b/2} x kt(v+x \tan \varphi) dx$$

On peut bien avoir :

$$M = kt \left[v \int_{-b/2}^{b/2} x dx + \tan \varphi \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx \right]$$

On peut trouver que le premier terme est nul :

$$\int_{-b/2}^{b/2} x \, dx = 0$$

et :

$$\int_{-b/2}^{b/2} x^2 \, dx = \frac{b^3}{12}$$

Donc :

$$M = kt \frac{b^3}{12} \tan \varphi$$

On en déduit :

$$\tan \varphi = \frac{12M}{ktb^3}$$

Pour les petites rotations on a :

$$M = \frac{ktb^3}{12} \varphi$$

La rigidité rotationnelle est donc :

$$K_\varphi = \frac{M}{\varphi} = \frac{ktb^3}{12}$$

2.5 Étude des zones de contact

Dans les développements précédents, nous avons supposé que le contact entre le tenon et la mortaise existait sur toute la largeur du tenon. Cette hypothèse reste valable lorsque la rotation du tenon demeure faible. Cependant, lorsque le moment appliqué devient plus important, la rotation augmente et une partie du tenon peut se détacher de la mortaise. Le contact n'existe alors plus sur toute la surface, mais uniquement dans les zones où l'enfoncement reste positif.

La condition de contact peut alors s'écrire :

$$\delta(x) \leq 0$$

En utilisant l'expression du déplacement :

$$\delta(x) = -v - x\varphi$$

la condition de contact s'écrit :

$$-v - x\varphi \leq 0$$

La frontière de la zone de contact est définie par :

$$\delta(x) = 0$$

ce qui donne :

$$v + x\varphi = 0$$

On en déduit la position de la limite de contact : $x_c = -\frac{v}{\varphi}$

En utilisant les résultats précédemment obtenus :

$$v = \frac{T}{ktb}, \quad \varphi = \frac{12M}{ktb^3}$$

on obtient :

$$x_c = -\frac{T}{ktb} * \frac{ktb^3}{12M} = -\frac{Tb^2}{12M}$$

La zone de contact est donc réduite à l'intervalle :

$$x \in \left[x_c, \frac{b}{2} \right]$$

La longueur de la zone de contact est donnée par :

$$l_c = \frac{b}{2} - x_c = \frac{b}{2} + \frac{Tb^2}{12M}$$

Ainsi, lorsque le moment augmente, la zone de contact diminue progressivement d'un côté du tenon.

Dans la zone de contact, la pression reste donnée par le modèle de Winkler :

$$\sigma(x) = k(v + x\varphi)$$

alors qu'en dehors de cette zone :

$$\sigma(x) = 0$$

La distribution des pressions n'est donc plus uniforme et prend progressivement une forme triangulaire caractéristique d'un contact partiel.

Afin de déterminer plus précisément les dimensions des deux zones de contact, nous introduisons les longueurs d_1 et d_2 , définies à partir de la condition :

$$\delta\left(d_1 - \frac{b}{2}\right) = 0$$

En remplaçant l'expression du déplacement :

$$\delta(x) = -v - x \tan \varphi$$

on obtient :

$$v + \left(d_1 - \frac{b}{2}\right) \tan \varphi = 0$$

Ce qui donne :

$$d_1 \tan \varphi = \frac{b}{2} \tan \varphi - v \quad \text{et} \quad d_1 = \frac{b}{2} - \frac{v}{\tan \varphi}$$

De même :

$$d_2 = b - d_1 = \frac{b}{2} + \frac{v}{\tan \varphi}$$

En utilisant :

$$v = \frac{T}{ktb}, \quad \tan \varphi = \frac{12M}{ktb^3}$$

on obtient :

$$\frac{v}{\tan \varphi} = \frac{T}{ktb} * \frac{ktb^3}{12M} = \frac{Tb^2}{12M}$$

Donc :

$$\boxed{d_1 = \frac{b}{2} - \frac{Tb^2}{12M}} \quad \text{et} \quad \boxed{d_2 = \frac{b}{2} + \frac{Tb^2}{12M}}$$

Les enfoncements aux deux extrémités du contact sont alors :

$$\delta_1 = \delta \left(-\frac{b}{2} \right) = -v + \frac{b}{2} \tan \varphi \quad \text{et} \quad \delta_2 = \delta \left(\frac{b}{2} \right) = -v - \frac{b}{2} \tan \varphi$$

En remplaçant v et tanφ :

$$\delta_1 = -\frac{T}{ktb} + \frac{b}{2} \frac{12M}{ktb^3} \quad \text{et} \quad \delta_2 = -\frac{T}{ktb} - \frac{b}{2} \frac{12M}{ktb^3}$$

On simplifie donc :

$$\boxed{\delta_1 = \frac{1}{ktb} \left(\frac{6M}{b} - T \right)} \quad \boxed{\delta_2 = -\frac{1}{ktb} \left(T + \frac{6M}{b} \right)}$$

Les contraintes de contact aux extrémités deviennent alors :

$$\sigma_1 = k\delta_1 = \frac{1}{tb} \left(\frac{6M}{b} - T \right) \quad \text{et} \quad \sigma_2 = k\delta_2 = -\frac{1}{tb} \left(T + \frac{6M}{b} \right)$$

Cette étude montre que l'augmentation du moment entraîne une concentration progressive des contraintes du côté comprimé ainsi qu'une réduction de la zone réellement en contact. Le comportement mécanique de l'assemblage devient alors plus fortement non linéaire, notamment à cause de la diminution de la rigidité rotationnelle effective du système.

3 Modélisation numérique et difficultés de contact

3.1 Géométrie du modèle

Afin de réaliser les simulations numériques sous ANSYS, nous avons construit un modèle tridimensionnel simplifié de l'assemblage tenon-mortaise. Dans le but de limiter la complexité géométrique et de faciliter les calculs numériques, certaines caractéristiques réelles des assemblages en bois ont été volontairement simplifiées. Le modèle retenu conserve néanmoins les dimensions principales nécessaires à l'étude du contact et de la transmission des efforts.

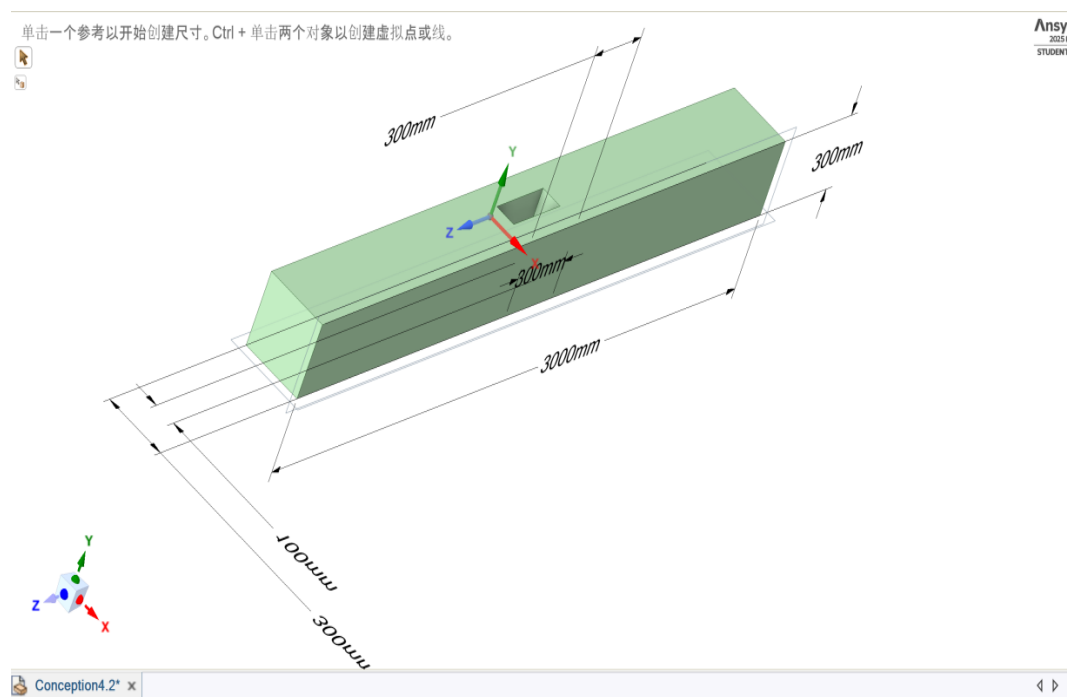


Figure 2 : Géométrie de la mortaise utilisée pour les simulations numériques.

La figure 2 présente la géométrie de la mortaise utilisée dans le modèle numérique. La pièce possède une longueur totale de 3000 mm, ainsi qu'une section de 300×300 mm. La zone de rainure correspondant à l'insertion du tenon possède une largeur de 100 mm, une hauteur de 300 mm et une longueur de 300 mm.

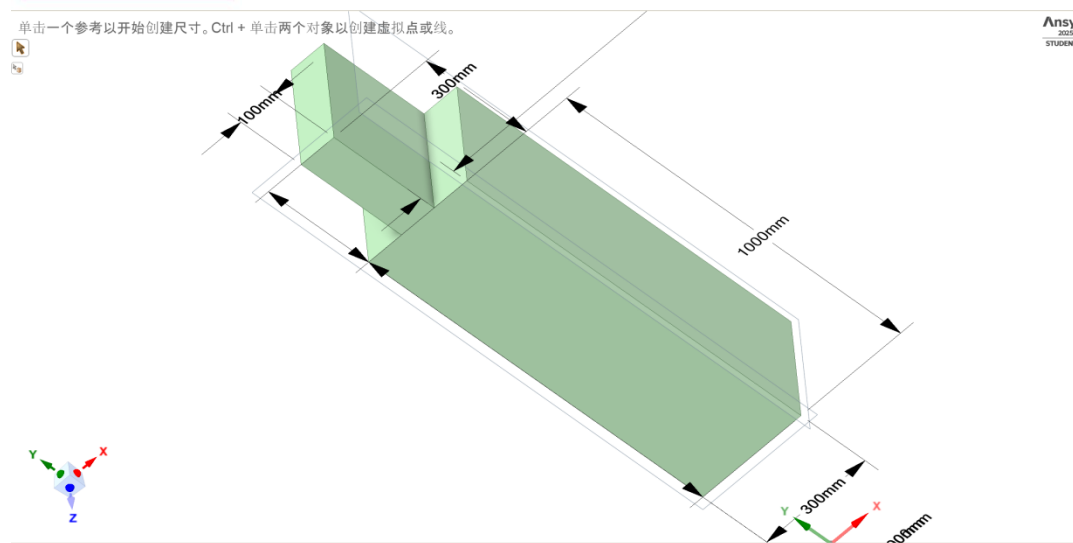


Figure 3 : Géométrie du tenon utilisée dans le modèle numérique.

La figure 3 montre la géométrie du tenon. La partie extérieure du tenon possède une longueur de 1000 mm et une largeur de 300 mm. La zone d'emboîtement avec la mortaise possède une largeur de 100 mm, une hauteur de 300 mm et une longueur de 300 mm, correspondant aux dimensions de la rainure de la mortaise afin d'assurer le contact entre les deux pièces.

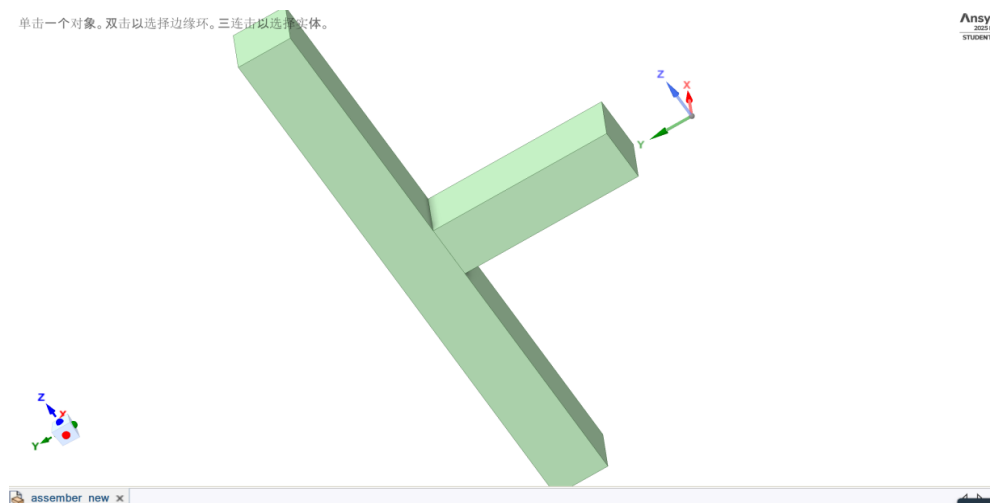


Figure 4 : Assemblage complet tenon-mortaise.

Enfin, la figure 4 représente l'assemblage complet du système tenon-mortaise utilisé pour les calculs numériques. Cette géométrie simplifiée permet d'étudier les phénomènes de contact, les déplacements ainsi que la distribution des contraintes sous chargement tout en gardant un temps de calcul raisonnable.

3.2 Matériaux et hypothèses mécaniques

Dans cette étude, les deux pièces de l'assemblage sont modélisées à l'aide d'un comportement élastique linéaire isotrope et homogène. Le matériau est donc supposé suivre les lois classiques de l'élasticité linéaire dans le domaine des petites déformations.

Pour les simulations numériques, nous avons choisi un module de Young et un coefficient de Poisson :

Élément	Module de Young	Coefficient de Poisson
Tenon-Mortaise	$E = 12\,500\text{MPa}$	$\nu = 0.25$

Tableau 1 : Propriétés mécaniques du matériau

Ces valeurs ont été choisies à partir des propriétés mécaniques généralement rencontrées pour des matériaux bois utilisés dans les structures traditionnelles.

Afin de simplifier le modèle numérique, plusieurs hypothèses ont été adoptées. En particulier, l'anisotropie naturelle du bois n'a pas été prise en compte. Le matériau a été considéré isotrope afin de limiter la complexité des calculs et de faciliter l'interprétation des résultats.

De plus, les phénomènes de plasticité, d'endommagement et de fissuration n'ont pas été étudiés dans ce projet. L'ensemble des simulations a donc été réalisé dans le domaine élastique linéaire.

3.3 Conditions aux limites et définition du contact

Dans cette partie, nous définissons les conditions aux limites utilisées dans les simulations numériques ainsi que les paramètres de contact entre le tenon et la mortaise. Ces conditions jouent un rôle important dans la stabilité du calcul ainsi que dans la qualité des résultats obtenus.

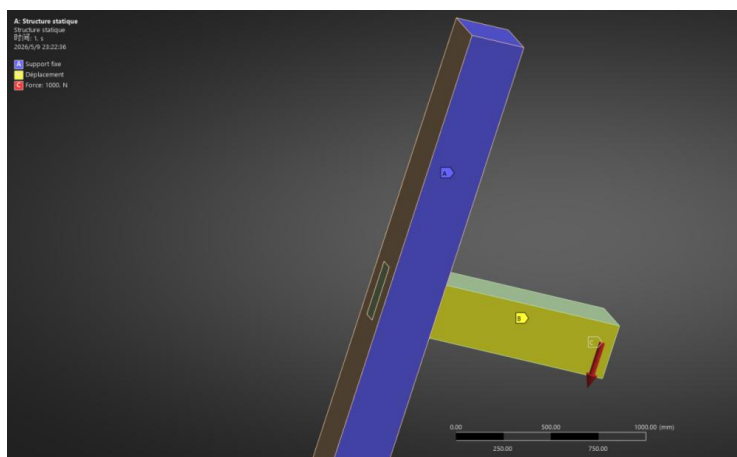


Figure 5 : Conditions aux limites appliquées au modèle numérique : fixation de la mortaise et limitation des déplacements du tenon.

La figure 5 présente l'ensemble des conditions aux limites appliquées au modèle numérique. Afin d'éviter tout mouvement global de la structure, les quatre faces externes de la mortaise ont été entièrement fixées à l'aide d'une condition de type **Fixed Support**. De plus, afin de limiter les effets de torsion pendant le calcul, les déplacements suivant les directions y et z ont été bloqués sur les faces latérales du tenon.

Une force verticale dirigée vers le bas a également été appliquée sur la face extérieure du tenon afin de reproduire l'effet d'un chargement mécanique sur l'assemblage.

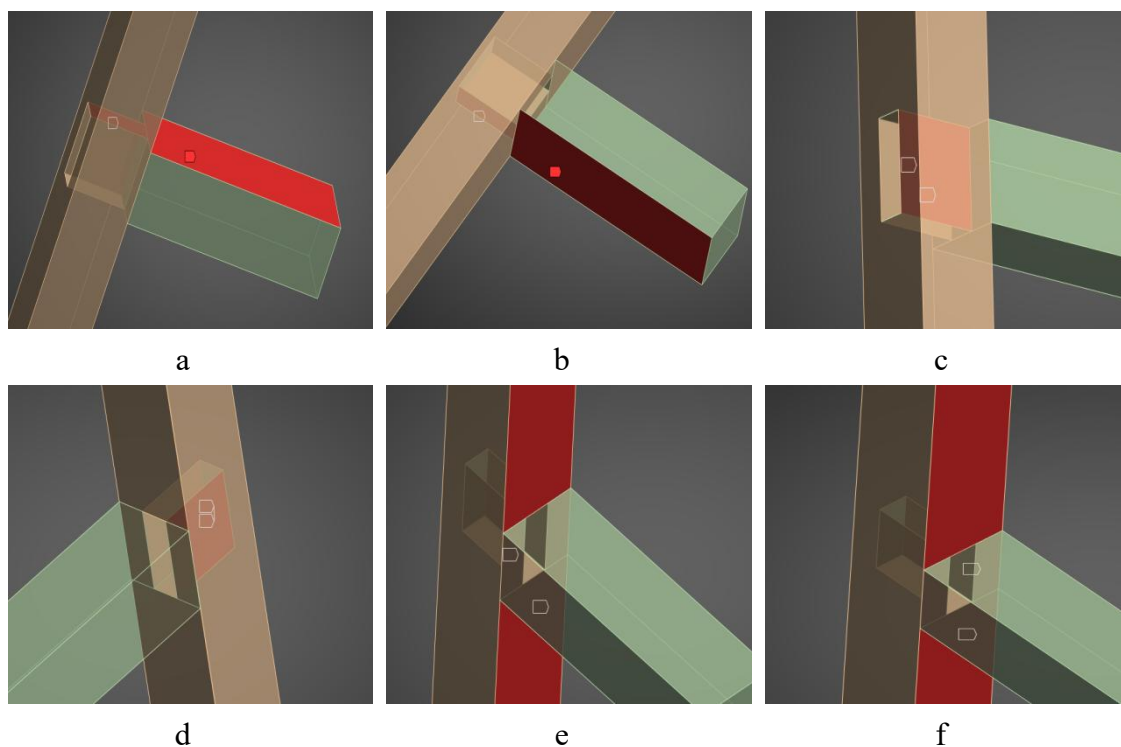


Figure 6 : Définition des zones de contact entre le tenon et la mortaise dans le modèle ANSYS.

Enfin, la figure 6 présente la définition des surfaces de contact entre le tenon et la mortaise dans ANSYS. Dans cette étude, les surfaces du tenon ont été définies comme surfaces **Contact**, tandis que les surfaces de la mortaise ont été définies comme surfaces **Target**, afin de permettre l'étude des interactions mécaniques entre les deux pièces pendant le chargement.

3.4 Difficultés numériques rencontrées

3.4.1 Problèmes de pénétration

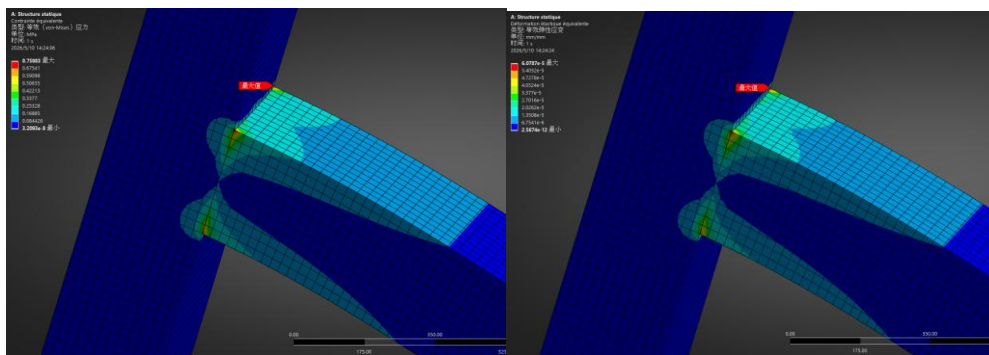


Figure 7 : Modèle utilisant une condition de contact de type *Liaison totale* sur l'ensemble des surfaces de contact entre le tenon et la mortaise.

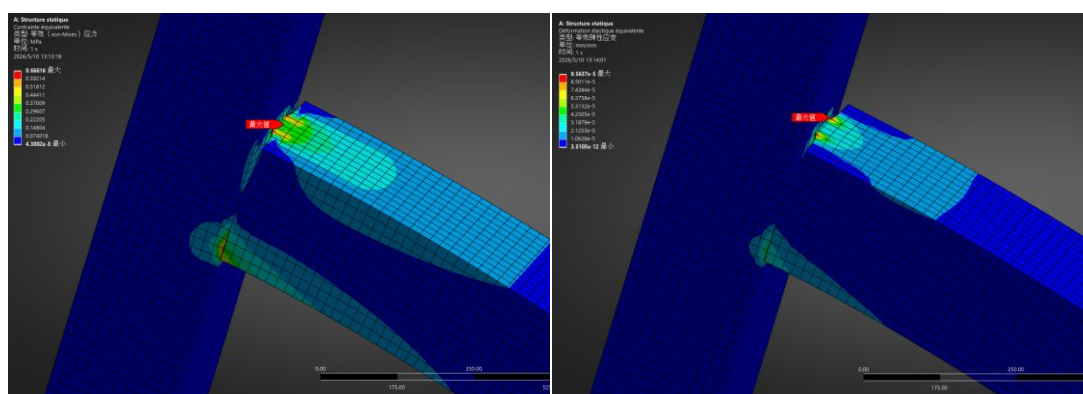


Figure 8 : Modèle numérique final : les surfaces de contact internes sont définies avec une condition *Liaison totale*, tandis que les surfaces extérieures e et f utilisent une condition *Sans frottement*.

Dans ANSYS, plusieurs types de conditions de contact étaient disponibles pour notre modèle, notamment **Liaison totale**, **Liaison initiale**, **Avec frottement** et **Sans frottement**. Afin de déterminer la configuration la plus adaptée à notre étude, plusieurs essais numériques ont été réalisés.

Dans un premier temps, nous avons choisi d'utiliser une condition de contact **Sans frottement** sur l'ensemble des surfaces de contact. Cependant, les résultats obtenus ont montré un comportement non physique du modèle, avec une interpénétration importante entre le tenon et la mortaise. Les figures correspondantes sont présentées en annexes.

Après analyse, nous avons considéré que ce problème provenait du fait que la stabilité mécanique d'un assemblage tenon-mortaise dépend fortement des effets de frottement entre les surfaces de contact. Dans le cas de **Sans frottement**, le système perd une grande partie de sa capacité de maintien, ce qui conduit à un comportement instable du modèle numérique.

Nous avons donc modifié les conditions de contact en utilisant un contact **Avec frottement**, avec un coefficient de frottement fixé à : $\mu = 0.5$

Malgré cette modification, le modèle restait encore instable dans certaines zones de contact. Après plusieurs discussions et essais numériques, nous avons alors choisi d'utiliser une condition de type **Liaison totale** sur l'ensemble des surfaces de contact. Cette configuration a permis d'obtenir un modèle globalement stable.

Cependant, comme le montre la figure 7, certaines zones extérieures du tenon qui devraient normalement se séparer de la mortaise restaient artificiellement liées et présentaient encore des contraintes de contact non réalistes.

Afin de corriger ce problème, nous avons finalement remplacé les conditions de contact des surfaces e et f de la figure 6 par une condition **Sans frottement**. Nous avons considéré que ces zones n'étaient pas principalement gouvernées par les effets de frottement et qu'une condition de contact plus libre permettait d'obtenir un comportement mécanique plus cohérent.

Le modèle numérique final retenu pour les simulations est présenté sur la figure 8.

3.4.2 Sensibilité du solveur de contact

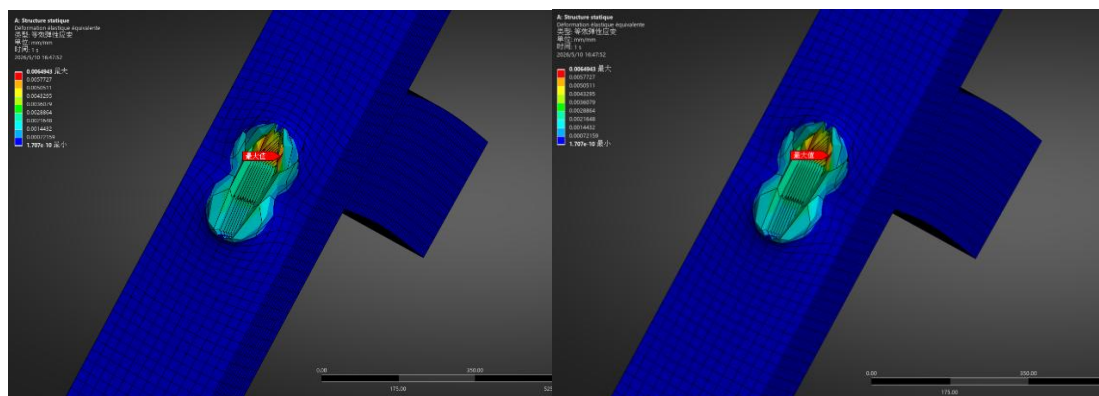


Figure 9 : Résultat numérique obtenu lorsque les surfaces de contact a et b sont définies avec une condition **Avec frottement**, tandis que les surfaces c et d restent en **Liaison totale**.

Même si le modèle précédent permettait d'obtenir une simulation stable, celui-ci restait basé sur une configuration très idéalisée, notamment à cause de l'utilisation majoritaire de conditions de type **Liaison totale**. Afin de se rapprocher davantage du comportement réel d'un assemblage tenon-mortaise, nous avons donc cherché à introduire des effets de frottement dans certaines zones de contact.

Dans cette nouvelle configuration, nous avons conservé les surfaces de contact c et d en condition **Liaison totale**, tandis que les surfaces a et b ont été remplacées par une condition **Avec frottement**.

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 9. Bien que le calcul converge, nous avons observé un comportement mécanique qui semble peu réaliste. En effet, sous l'application d'une force verticale dirigée vers le bas, une zone de séparation apparaît dans la partie inférieure du contact au niveau de la mortaise.

Or, d'un point de vue mécanique, cette configuration paraît incohérente. Sous un chargement vertical descendant, la zone comprimée devrait principalement se situer dans la partie inférieure du contact, tandis qu'une éventuelle ouverture ou séparation devrait apparaître dans la partie supérieure. La présence d'une cavité dans la zone inférieure indique donc que cette configuration de contact ne représente probablement pas correctement le comportement réel de l'assemblage.

3.4.3 Limites liées au logiciel

Au cours des différentes simulations réalisées sous ANSYS, nous avons observé plusieurs comportements numériques difficiles à interpréter physiquement, en particulier lors de l'utilisation de certaines conditions de contact avec frottement. Malgré plusieurs modifications des paramètres de contact et différentes configurations testées, certains résultats restaient peu cohérents avec le comportement mécanique attendu de l'assemblage tenon-mortaise.

Après analyse, nous pensons qu'une partie de ces difficultés peut provenir des limites du modèle numérique ainsi que du traitement des contacts par le logiciel ANSYS. En effet, les problèmes de contact avec frottement sont connus pour être fortement non linéaires et sensibles au choix des paramètres numériques, du maillage ainsi que des méthodes de résolution utilisées.

De plus, notre étude a été réalisée à l'aide de la version étudiante d'ANSYS, ce qui limite certaines possibilités de réglage avancé du solveur et des paramètres de contact. Il est donc possible qu'une partie des comportements observés provienne des limitations numériques du logiciel plutôt que du comportement mécanique réel de la structure.

Enfin, la géométrie simplifiée utilisée dans notre modèle peut également amplifier certaines instabilités numériques, notamment dans les zones où les contacts évoluent rapidement pendant le chargement.

3.5 Choix du cas d'étude retenu

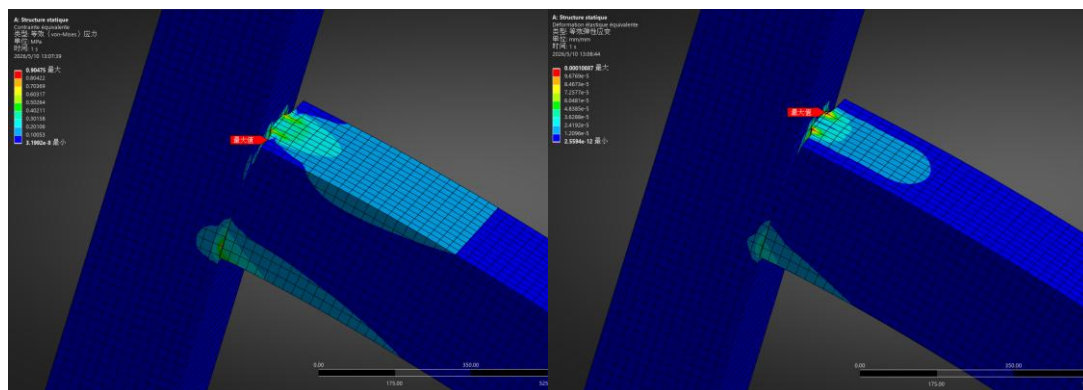


Figure 10 : Résultat numérique obtenu lorsque la surface de contact a est définie avec une condition Avec **frottement**, tandis que les surfaces b, c et d restent en Liaison totale.

4 Résultats numériques et analyse mécanique

4.1 Validation qualitative du contact total

Dans un premier temps, l'état de contact est analysé afin de vérifier que le modèle numérique final permet bien la transmission des efforts entre le tenon et la mortaise. La figure montre que la zone de contact principale est activée pendant le chargement. On observe principalement des zones en **adhérence** et en **glissement local**, ce qui indique que le contact est bien établi entre les deux pièces.

La présence locale de zones indiquées comme **sur-contraintes** peut être liée à la combinaison entre les conditions de contact de type **liaison totale**, les effets de bord et la discrétisation du maillage. Ces zones restent localisées au voisinage des bords de contact et ne remettent pas en cause le comportement global du modèle.

L'analyse de la pression de contact confirme également que les efforts sont bien transmis à travers l'interface. La pression maximale obtenue est :

$$p_{max} = 0.5184 \text{ MPa}$$

La pression n'est pas uniformément répartie sur toute la surface de contact. Elle se concentre principalement dans la zone comprimée, ce qui est cohérent avec le chargement appliqué et avec le comportement attendu d'un assemblage tenon-mortaise. La valeur minimale affichée est légèrement négative :

$$p_{min} = -0.015176 \text{ MPa}$$

Cette valeur reste très faible devant la pression maximale et peut être interprétée

comme un effet numérique local lié au post-traitement des résultats de contact. Ainsi, les résultats de statut et de pression montrent que le contact est mécaniquement actif et que le modèle final est suffisamment stable pour poursuivre l'analyse des déplacements et des contraintes.

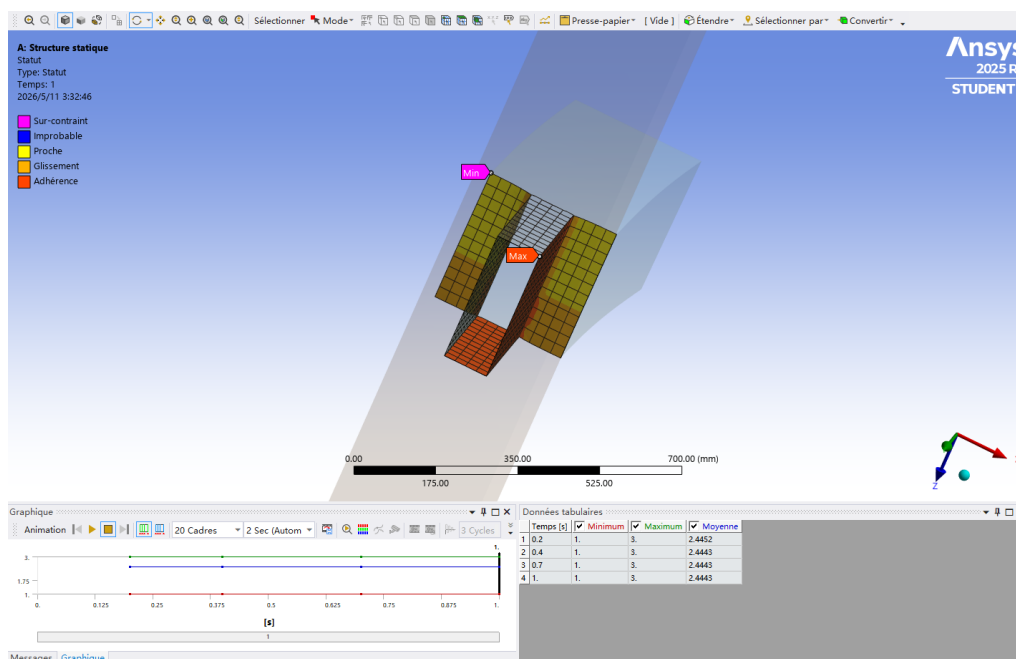


Figure 11 : État de contact du modèle numérique final.

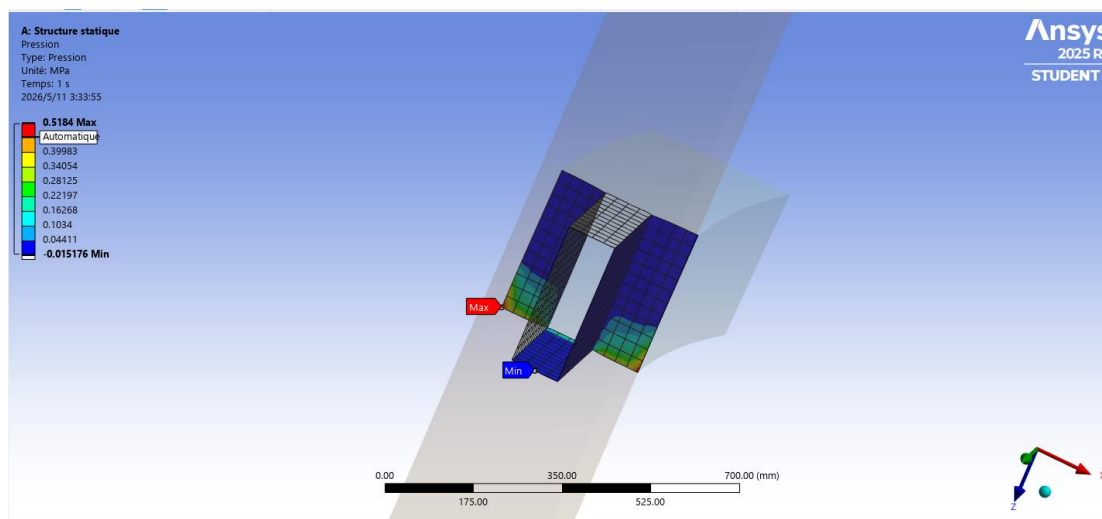


Figure 12 : Distribution de la pression de contact dans l'interface tenon-mortaise.

4.2 Analyse des déplacements

Afin d'analyser la réponse en déplacement de l'assemblage tenon-mortaise, nous avons étudié le déplacement directionnel suivant l'axe Z, qui correspond à la direction

principale du chargement appliqué au tenon. Pour cette analyse, cinq valeurs de l'effort vertical ont été considérées :

$$T=1000, 1500, 2000, 2500, 3000 \text{ N.}$$

Pour chaque simulation, la géométrie, le maillage, les conditions aux limites ainsi que les conditions de contact ont été conservés identiques. Seule la valeur de l'effort appliqué a été modifiée. Cette démarche permet d'étudier directement l'influence du chargement sur le déplacement du tenon.

La carte de déplacement directionnel suivant l'axe Z montre que le déplacement maximal est localisé à l'extrémité libre du tenon. Cette localisation est cohérente avec la position de la force appliquée. En effet, le chargement vertical appliqué à l'extrémité du tenon produit non seulement un déplacement vertical, mais également un effet de levier qui tend à faire tourner le tenon autour de la zone de contact avec la mortaise. La mortaise reste quant à elle quasiment immobile en raison des conditions de fixation imposées sur ses faces externes.

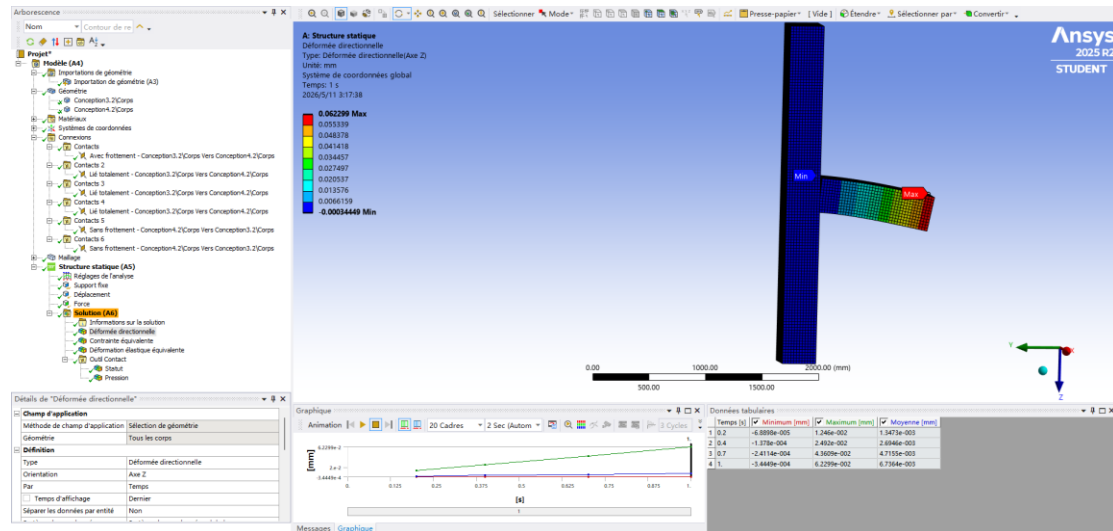


Figure 13 : Déplacement directionnel suivant l'axe Z du tenon sous chargement vertical.

Le tableau suivant présente les valeurs minimales, maximales et moyennes du déplacement directionnel suivant l'axe Z pour les différentes valeurs de l'effort appliqué.

(T) [N]	uZ,min [mm]	uZ,max [mm]	uZ,moy [mm]
1000	-0.00034449	0.062299	0.0067364
1500	-0.00051674	0.093448	0.010105
2000	-0.0006898	0.1246	0.013473
2500	-0.00086123	0.15575	0.016841
3000	-0.001035	0.1869	0.02029

Tableau 2 : Évolution du déplacement directionnel suivant Z en fonction de l'effort appliqué.

D'après ce tableau, on observe que le déplacement maximal suivant l'axe Z augmente régulièrement avec l'effort appliqué. Lorsque l'effort passe de 1000 N à 3000 N, il est multiplié par 3. Dans le même temps, le déplacement maximal passe de :

$$u_{Z,max} = 0.062299 \text{ mm}$$

à :

$$u_{Z,max} = 0.1869 \text{ mm.}$$

Le rapport entre ces deux valeurs est :

$$\frac{0.1869}{0.062299} \approx 3.00$$

Cette évolution montre que, dans la plage de chargement étudiée, le déplacement maximal varie de manière presque proportionnelle à l'effort appliqué.

Afin de quantifier cette tendance, une régression linéaire a été réalisée entre l'effort appliqué T et le déplacement maximal $u_{Z,max}$. La relation obtenue est :

$$u_{Z,max} = 6.230080 \times 10^{-5} T - 2.200000 \times 10^{-6}$$

Le coefficient de détermination associé est :

$$R^2 = 1.000000.$$

Cette valeur très proche de 1 montre que les résultats numériques suivent une relation linéaire presque parfaite dans l'intervalle de chargement étudié.

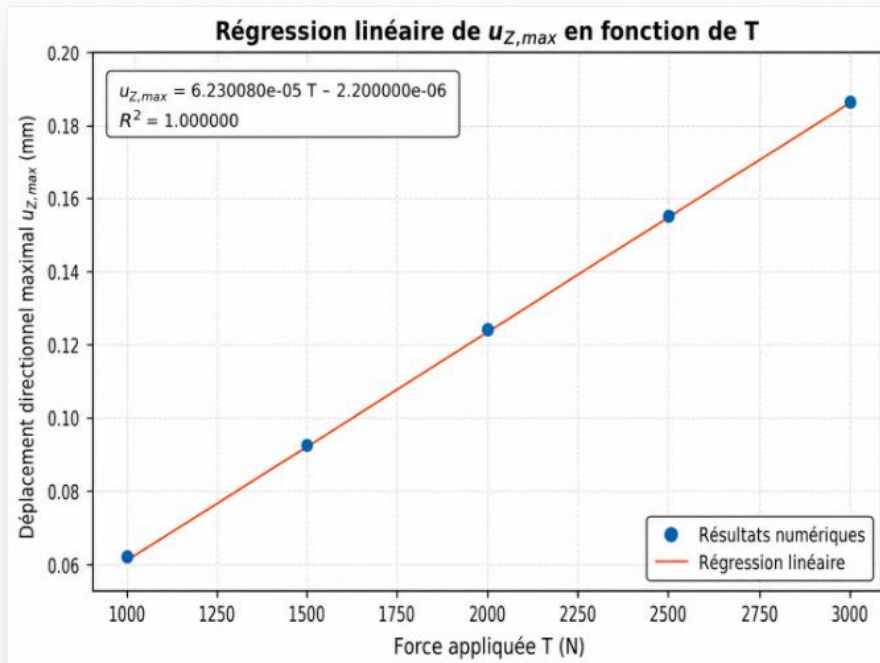


Figure 14 : Régression linéaire du déplacement maximal $u_{Z,max}$ en fonction de l'effort appliqué T .

Il convient toutefois de préciser que $u_{Z,max}$ ne correspond pas directement à la translation analytique v . Dans le modèle théorique, v représente la translation verticale du tenon au centre de la zone de contact. Dans le modèle numérique, le déplacement maximal est localisé à l'extrémité libre du tenon. Il contient donc à la fois l'effet de translation verticale et l'effet de rotation du tenon sous l'action du chargement excentré. Pour cette raison, $u_{Z,max}$ est utilisé ici comme un indicateur global de la

réponse verticale du tenon, et non comme une valeur directement égale à v . Cette tendance reste néanmoins cohérente avec le modèle analytique. En effet, celui-ci prévoit :

$$v = \frac{T}{ktb}$$

Lorsque la raideur de contact k , l'épaisseur t et la largeur de contact b restent constantes, la translation verticale v est proportionnelle à l'effort appliqué T . Même si la grandeur extraite numériquement n'est pas exactement v , l'évolution quasi linéaire de $u_{z,max}$ confirme qualitativement la tendance prédite par le modèle théorique.

Ainsi, l'analyse des déplacements montre que le modèle numérique présente une réponse cohérente et stable sous chargement vertical. L'augmentation presque linéaire du déplacement maximal avec l'effort appliqué confirme que le comportement global du modèle reste compatible avec les hypothèses de l'élasticité linéaire adoptées dans cette étude.

4.3 Analyse des contraintes

Après l'analyse des déplacements, nous étudions la distribution des contraintes dans l'assemblage. La grandeur considérée ici est la contrainte équivalente de von Mises, notée :

$$\sigma_{vM}.$$

Cette grandeur permet d'identifier les zones les plus sollicitées dans la structure. Elle ne correspond pas directement à la pression de contact théorique $\sigma(x)$, mais elle constitue un indicateur global de l'état de contrainte tridimensionnel dans le tenon et la mortaise.

Les cartes de contrainte équivalente montrent que les contraintes maximales apparaissent principalement au voisinage de la zone de contact entre le tenon et la mortaise. Plus précisément, la concentration des contraintes se situe près de l'arête de la mortaise, à l'endroit où les efforts transmis par le tenon sont les plus importants. Cette localisation est cohérente avec le mécanisme de transmission des efforts par contact.

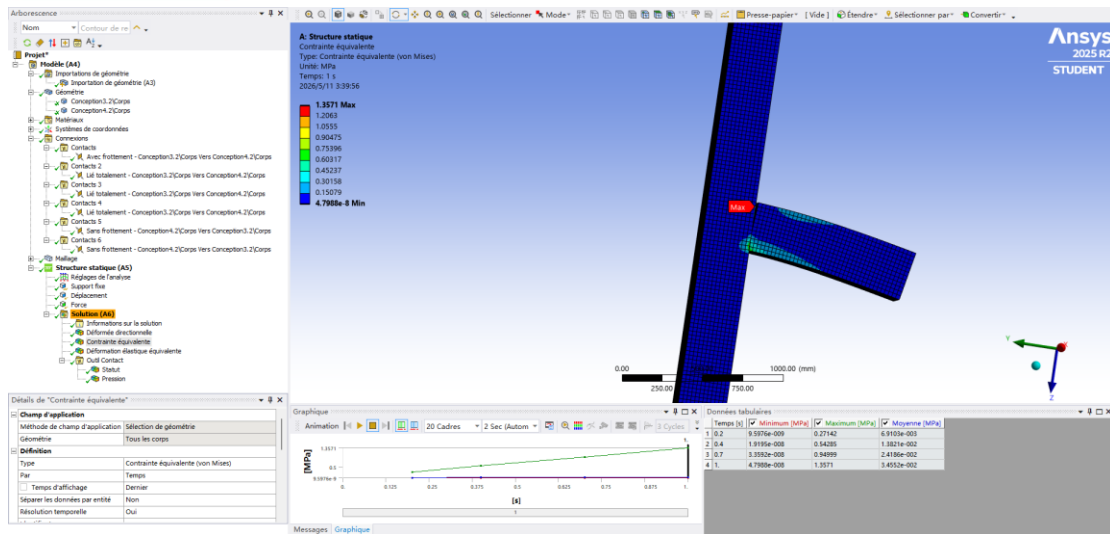


Figure 15 : Distribution de la contrainte équivalente de von Mises dans l'assemblage.

Afin d'étudier l'influence de l'effort appliqué sur les contraintes, les valeurs maximales de la contrainte équivalente de von Mises ont été relevées pour les cinq valeurs de chargement :

$$T=1000, 1500, 2000, 2500, 3000 \text{ N.}$$

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant.

T [N]	$\sigma_{vM, \min}$ [MPa]	$\sigma_{vM, \max}$ [MPa]
1000	3.1992×10^{-8}	0.90475
1500	4.7988×10^{-8}	1.3571
2000	6.3984×10^{-8}	1.8095
2500	7.9980×10^{-8}	2.2619
3000	9.5976×10^{-8}	2.7142

Tableau 3 : Évolution de la contrainte équivalente maximale en fonction de l'effort appliqué.

D'après ce tableau, on observe que la contrainte équivalente maximale augmente régulièrement avec l'effort appliqué. Lorsque l'effort passe de 1000 N à 3000 N il est multiplié par 3. Dans le même temps, la contrainte équivalente maximale passe de :

$$\sigma_{vM, \max} = 0.90475 \text{ MPa}$$

à :

$$\sigma_{vM, \max} = 2.7142 \text{ MPa.}$$

Le rapport entre ces deux valeurs est :

$$\frac{2.7142}{0.90475} \approx 3.00$$

Cette évolution montre que, dans la plage de chargement étudiée, la contrainte équivalente maximale varie de manière presque proportionnelle à l'effort appliqué.

Une régression linéaire peut être réalisée entre l'effort appliqué T et la contrainte maximale $\sigma_{vM, \max}$. La relation obtenue est approximativement :

$$\sigma_{vM, \max} = 9.04725 \times 10^{-4} T + 2.20 \times 10^{-5}$$

Le coefficient de détermination est très proche de 1 :

$$R^2 \approx 1.000.$$

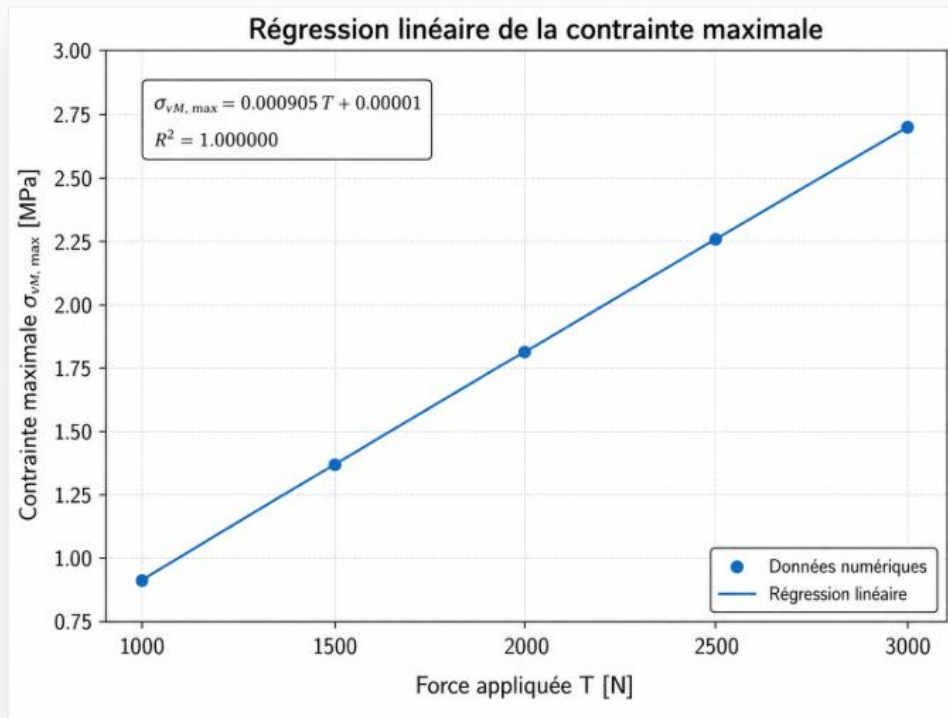


Figure 16 : Régression linéaire de la contrainte maximale en fonction de l'effort appliqué T.

Cette évolution quasi linéaire est cohérente avec le comportement élastique linéaire adopté dans le modèle numérique. En effet, dans le domaine élastique linéaire, lorsque les conditions de contact restent stables et que la géométrie ne change pas, une augmentation proportionnelle du chargement conduit à une augmentation proportionnelle des contraintes.

Il faut toutefois rappeler que la contrainte équivalente de von Mises ne doit pas être confondue avec la pression de contact $\sigma(x)$ du modèle analytique. La grandeur $\sigma(x)$ représente une pression normale locale à l'interface, tandis que σ_{vM} représente une contrainte équivalente issue de l'état de contrainte tridimensionnel dans le matériau. Ainsi, les résultats de von Mises permettent surtout d'identifier les zones critiques de concentration de contraintes, tandis que la pression de contact sera utilisée pour discuter plus directement la relation avec **le modèle de Winkler**.

Ainsi, l'analyse des contraintes montre que le modèle numérique présente un comportement cohérent : les contraintes maximales sont localisées près de la zone de contact et augmentent presque **linéairement** avec l'effort appliqué.

4.4 Analyse de la pression de contact

La pression de contact constitue la grandeur numérique la plus directement liée au modèle analytique de Winkler. En effet, dans le modèle théorique, la pression normale

de contact est supposée proportionnelle à l'enfoncement local :

$$\sigma(x) = k\delta(x).$$

Afin d'étudier l'évolution de la pression de contact avec le chargement, la pression maximale $p_{\max}$ a été relevée pour les cinq valeurs de l'effort appliqué :

$$T=1000, 1500, 2000, 2500, 3000 \text{ N}$$

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant.

(T) [N]	$p_{\min}$ [MPa]	$p_{\max}$ [MPa]	p_{moy} [MPa]
1000	-0.015176	0.5184	0.013447
1500	-0.022764	0.7776	0.020171
2000	-0.030352	1.0368	0.026894
2500	-0.03794	1.296	0.033618
3000	-0.045528	1.5552	0.040342

Tableau 4 : Évolution de la pression maximale de contact en fonction de l'effort appliqué.

Cette relation linéaire est cohérente avec le modèle de Winkler, dans lequel la pression de contact est proportionnelle à l'enfoncement local. Lorsque l'effort appliqué augmente, l'enfoncement du tenon dans la mortaise augmente également, ce qui conduit à une augmentation de la pression de contact.

Les valeurs minimales affichées sont légèrement négatives. Cependant, elles restent faibles devant les valeurs maximales de pression. Elles peuvent donc être interprétées comme des effets numériques locaux liés au post-traitement des résultats de contact, et non comme des pressions de traction physiques.

Ainsi, l'évolution de $p_{\max}$ confirme qualitativement la tendance prévue par le modèle analytique : une augmentation de l'effort appliqué entraîne une augmentation quasi **linéaire de la pression de contact**.

Ce résultat est cohérent avec la relation de **Winkler** $\sigma(x)=k\delta(x)$, car l'augmentation de l'effort appliqué entraîne une augmentation de l'enfoncement local et donc de la pression de contact.

Cette observation permet également de discuter les contraintes de contact aux extrémités σ_1 et σ_2 . Dans le modèle analytique, celles-ci sont données par :

$$\sigma_1 = \frac{1}{tb} \left(\frac{6M}{b} - T \right)$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{tb} \left(T + \frac{6M}{b} \right)$$

Dans le modèle numérique, le moment n'est pas appliqué directement, mais il est créé par la force verticale appliquée à l'extrémité libre du tenon :

$$M_{\text{eq}} = Te$$

En remplaçant M par M_{eq} , on obtient :

$$\sigma_1 = \frac{1}{tb} \left(\frac{6Te}{b} - T \right)$$

$$\sigma_2 = -\frac{T}{tb} \left(1 + \frac{6e}{b} \right)$$

Comme e , t et b restent constants dans l'étude paramétrique, les expressions précédentes montrent que :

$$\sigma_1 \propto T, \sigma_2 \propto T.$$

L'augmentation linéaire de p_{max} observée dans les résultats ANSYS est donc cohérente avec l'évolution théorique attendue des contraintes de contact aux extrémités.

Il convient toutefois de préciser que p_{max} ne correspond pas directement aux valeurs analytiques σ_1 ou σ_2 . Les grandeurs σ_1 et σ_2 sont issues d'un modèle analytique bidimensionnel simplifié, tandis que p_{max} est obtenu à partir d'un modèle numérique tridimensionnel avec des effets de bord, de maillage et de contact. La comparaison doit donc être interprétée comme une validation qualitative de la tendance, et non comme une égalité quantitative directe.

Ainsi, les résultats numériques confirment que l'augmentation de l'effort appliqué entraîne une augmentation proportionnelle du niveau de pression de contact, ce qui est cohérent avec le comportement prévu par le modèle analytique.

4.5 Vérification de l' effet du moment équivalent

Dans le modèle analytique, la rotation du tenon est gouvernée par le moment appliqué M . La relation obtenue est :

$$\tan \varphi = \frac{12M}{ktb^3}$$

Ainsi, lorsque la raideur de contact k , l'épaisseur t et la largeur de contact b restent constantes, la rotation du tenon est proportionnelle au moment appliqué :

$$\varphi \propto M.$$

Dans le modèle numérique ANSYS, aucun moment n'est directement appliqué. Cependant, la force verticale T est appliquée à l'extrémité libre du tenon. Cette force possède donc un bras de levier par rapport à la zone de contact et crée un moment équivalent :

$$M_{eq} = Te$$

Dans notre modèle, le bras de levier est :

$$e = 1000 \text{ mm}$$

On obtient donc :

$$M_{eq} = 1000T.$$

La rotation du tenon n'a pas été directement extraite dans ANSYS. Cependant, comme le déplacement maximal est localisé à l'extrémité libre du tenon, on peut introduire un indicateur de rotation effectif :

$$\varphi_{\text{eff}} \approx \frac{u_{Z,\text{max}}}{e}$$

Les valeurs du moment équivalent pour les différents chargements sont données dans le tableau suivant.

(T)[N]	Meq [N · mm]	uZ, max [mm]	φeff [Rad]
1000	1.0×10^6	0.062299	6.229×10^{-5}
1500	1.5×10^6	0.093448	9.3448×10^{-5}
2000	2.0×10^6	0.1246	1.2460×10^{-4}
2500	2.5×10^6	0.15575	1.5575×10^{-4}
3000	3.0×10^6	0.1869	1.8690×10^{-4}

Tableau 5 : Évolution du moment équivalent et de l'indicateur de rotation en fonction de l'effort appliqué.

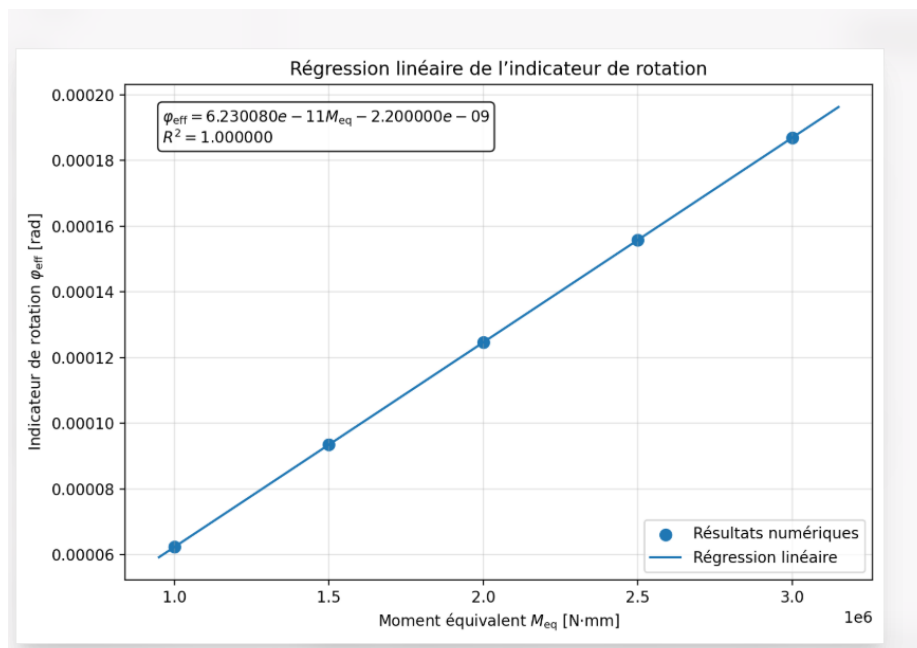


Figure 17 : Régression linéaire de l'indicateur de rotation φ_{eff} en fonction du moment équivalent M_{eq} .

Ainsi, l'indicateur de rotation augmente proportionnellement au moment équivalent appliqué. Cette évolution est cohérente avec la relation analytique :

$$\tan \varphi = \frac{12M}{ktb^3}$$

Même si φ_{eff} ne correspond pas exactement à la rotation théorique φ , cette comparaison permet de vérifier qualitativement la tendance principale du modèle analytique : l'augmentation du moment appliqué entraîne une augmentation proportionnelle de la rotation du tenon.

5 Conclusion

Ce projet nous a permis d'appliquer plusieurs connaissances acquises au cours du **Master 1**, notamment en mécanique des milieux continus, en mécanique des solides, en modélisation du contact et en méthode des éléments finis, à l'étude d'un problème mécanique concret : l'assemblage tenon-mortaise. Ce type d'assemblage, largement utilisé dans les structures en bois traditionnelles, présente un intérêt particulier car son comportement mécanique dépend fortement de la transmission des efforts et des phénomènes de contact entre les pièces.

Nous avons d'abord établi un modèle analytique simplifié basé sur le **modèle de Winkler**. Dans ce modèle, le tenon est considéré comme rigide et la mortaise comme un support élastique local. Cette approche permet de relier l'effort appliqué T , le déplacement vertical v , la rotation φ , le moment M et la pression de contact $\sigma(x)$. Elle reprend directement des notions vues en mécanique des solides, comme l'équilibre statique, la cinématique d'un solide rigide et le comportement élastique.

Un modèle numérique tridimensionnel a ensuite été construit sous **ANSYS Workbench**. Cette étape a demandé de faire plusieurs choix de modélisation : **géométrie, matériau, conditions aux limites, chargement et définition des contacts**. Les essais réalisés avec différents types de contact ont montré que le calcul était sensible à ces choix. Certaines configurations, notamment avec des contacts sans frottement ou avec frottement, ont conduit à des instabilités numériques ou à des résultats difficiles à interpréter physiquement.

Le modèle final repose donc **sur une simplification des conditions de contact** afin d'obtenir un calcul stable. Les résultats montrent que les efforts sont bien transmis entre le tenon et la mortaise. L'analyse des déplacements, des contraintes de von Mises et des pressions de contact donne une réponse mécanique cohérente de l'assemblage. En particulier, le déplacement maximal suivant l'axe Z , la contrainte équivalente maximale et la pression maximale de contact augmentent presque linéairement avec l'effort appliqué.

La comparaison avec le modèle théorique montre que les principales tendances sont retrouvées. Le déplacement augmente avec l'effort appliqué, la pression de contact augmente avec l'enfoncement local, les contraintes se concentrent près de la zone de contact, et la rotation du tenon reste cohérente avec l'effet du moment équivalent créé par la force appliquée à l'extrémité libre. Le modèle numérique ne vérifie donc pas exactement toutes les formules analytiques, mais il confirme globalement les tendances prévues par le modèle simplifié.

Ce travail a aussi mis en évidence plusieurs limites. L'utilisation de conditions de liaison totale dans certaines zones permet de stabiliser le calcul, mais elle ne permet pas de représenter correctement le décollement local. Ainsi, les longueurs de contact $d1$ et $d2$ ne peuvent pas être validées quantitativement avec le modèle retenu. De plus, le bois a été considéré comme un matériau élastique linéaire isotrope, alors que son

comportement réel est plus complexe, notamment en raison de son anisotropie. Pour conclure, ce projet a permis de faire le lien entre des outils théoriques étudiés en M1 et une application mécanique réelle. Le modèle analytique donne une première compréhension du comportement de l'assemblage, tandis que la simulation par éléments finis permet d'observer les champs de déplacement, de contrainte et de pression. Malgré les simplifications adoptées, le modèle de Winkler reste une base utile pour analyser les tendances principales du comportement d'un assemblage tenon-mortaise. Pour aller plus loin, il serait intéressant d'améliorer la modélisation du contact, de prendre en compte l'anisotropie du bois, de raffiner le maillage dans les zones de contact et d'extraire directement la rotation du tenon pour comparer plus précisément les résultats numériques au modèle analytique.